

Cebir Eğitimi Almayan Öğrenciler Problem Çözümlerinde Denklemleri Kullanabiliyorlar mı?

Hakan YAMAN¹, Sefa DÜNDAR²

Özet

Bu araştırmanın amacı, cebir eğitimi almamış öğrencilerin problem çözerken denklemleri kullanıp kullanamadıklarını araştırmaktır. Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması yöntemi uygulanmıştır. Amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak Bolu ilinin sosyo-ekonomik düzeyi orta seviyede olan bir ilçesindeki bir ilköğretim okulunun 5. sınıflarından 4'ü kız, 4'ü erkek olmak üzere 8 öğrenci araştırmaya katılmıştır. Verilerin toplanması için araştırmacılar tarafından doğru orantı, ters orantı, lineer ilişki ve üslü sayı konularını içeren birer tane sorudan oluşan 4 soruluk bir test hazırlanmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin sorularda verilen sayısal durumlarda ters orantı hariç sorun yaşamadıkları, verdikleri cevapları sözel olarak açıklayabildikleri bulunmuştur. Ayrıca cebir eğitimi almamış bu öğrencilerin verilen sorularla ilgili denklemler kurabildikleri ve farklı sayısal durumlar için bu denklemleri kullanabildikleri ortaya çıkmıştır.

Anahtar Kelimeler: Doğru-ters orantı, lineer ilişki, üslü sayılar, cebir öncesi, denklemler

Can the Students who haven't taken any Algebra Education Use Equations while Solving Problems?

Abstract

The aim of the study is to investigate whether students who haven't taken any algebra education use equations while solving problems or not. In the study, case study, one of the qualitative research methods, was used. Criterion sampling method of purposive sampling methods was used for selecting the participants. 8 students comprising of 4 girls and 4 boys of a 5th grade of an elementary school in a middle classed county of Bolu participated the study. A test including 4 questions namely, one right proportion, one inverse proportion, one linear relationship and one exponential number, was prepared by the researchers to collect data. As the result of the study it was found that while solving the questions, the students do not have any problems in numerical cases except inverse proportion and they can explain their answers orally. Additionally, it was appeared that the students who haven't taken any algebra education can set up equations about the questions asked and use these equations for different numerical cases.

Keywords: Direct-inverse proportion, linear relationship, exponential numbers, pre-algebra, equations

¹ Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Bolu-TÜRKİYE
E-posta: hakanyaman@ibu.edu.tr

² Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Bolu-TÜRKİYE
E-posta: sefadundar@gmail.com

Giriş

Her birey günlük hayatını kolaylaştırmak için matematiği özellikle de cebirde öğrendiklerini kullanmaktadır. Pazarda, markette alışveriş yaparken farkında olmadan birçok kez aldıklarımızın fiyatını hesaplamak için cebir kullanırız. Bu nedenlerden dolayı cebir ve cebirsel düşünmenin iyice anlaşılması, toplumun bütün üyeleri için gereklidir.

Cebirin bu derece önemli görülmesi nedeniyle NCTM (2000) de ortaokul ve lisedeki konulara hazırlanılması ve cebirin anlaşılmasında sağlam bir temel oluşturulmasında öğretmenlere yardımcı olmak için cebir standartlarını oluşturmuştur. Cebir standardı ile öğrencilerin örüntüler, ilişkiler ve fonksiyonları anlamaları kolaylaşmaktadır. Standart sembolik ifadeleri kullanma, ilişkileri anlama ve temsil etme, bu gibi matematiksel durumları analiz etme ve temsil etmede öğrencilere yardımcı olmaktadır. İlköğretimde verilen cebir eğitimi ile cebirin öğrencilerde eğitimin ilk yıllarından itibaren desteklenmesi gerektiği ifade edilmektedir. Bu eğitim ile öğrenciler eşitliğin ilişkisel anlamı gibi matematiksel özellikleri genellebilir, matematiksel muhakemelerini arttırabilir ve daha üst sınıflarda onları başarıya götürecek zihin alışkanlıkları kurabilirler (Yaman, Toluk ve Olkun, 2003; Cuoco, Goldenberg ve Mark, 2010).

Cebir matematiğin dili olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca cebirin, temel cebirsel kavramlara hâkim olanlar için daha ileri matematiksel konulara kapılar açtığı ifade edilmektedir (Lacampagne, Blair ve Kaput, 1995). Cebir aritmetiğin ötesine matematiği ilerletmede çok sayıda öğrenciyi engelleyen kritik bir filtre işlevi görmektedir. Bellisio ve Maher (1998) cebir öğrenmenin birçok öğrenci için zor bir konu olduğunu ifade etmektedirler. Bunun nedenini de somut aritmetik çalışmalardan daha soyut cebirsel fikirlerle ilgili çalışmalara kavramsal olarak geçmelerinin zor bir süreç olmasına bağlamaktadırlar. Wagner ve Kieran (1989) öğretim sürecinde gösterilen işlemlerin sayısal sonuçları üzerinde aritmetik olarak güçlü bir vurgu olması nedeniyle öğrencilerin cebir öğrenmede sorunlar yaşadıklarını söylemektedirler. Öncelikle öğrencilerin eşit işaretini ilişkisel bir sembol olarak değil bir işlem sembolü olarak görmelerinin bu sorunlardan birisi olduğunu ifade etmektedirler. Ayrıca öğrencilerin işlem yaparken $x+5$ gibi değişken içeren ifadelerle çalışmaktan rahatsız olduklarını söylemektedirler. Bir başka sorunu da öğrencilerin cebirsel ifadelerle işlem yaparlarken hep aritmetik işlemlerle ilişkili kuralları kullanmaya eğilimli olmalarına bağlamaktadırlar (Wagner ve Kieran, 1989). Cebir ile ilgili öğrencilerin yaşadıkları olumsuzlukların nedenlerinden birisi de önceki sınıflarda sadece aritmetik öğretimi yapılması olabilir (Xin, Wiles ve Lin, 2008). Nickson (2004) ilköğretimde aritmetik öğretimi ve öğreniminin cebirin öğrenilmesi

için önemli olduğunu ifade etmektedir. İlköğretimde öğretilen temel aritmetik olguların çoğu aritmetik ve cebirde ortaktır. Bununla birlikte Baroudi (2006) öğrencilerin daha üst sınıflarda cebir öğrenmelerine hazırlık için önceki sınıflarda aritmetik öğrenmeleri gerektiğini söylemektedir. Güncel araştırmalar öğrencilerin ilköğretim seviyesinde yaptıkları aritmetik işlemler üzerinde genellemeler yapmalarını önermektedir (Baroudi, 2006; Cai ve Moyer, 2007; Kieran, 2004; Nickson, 2004). Bu sayede öğrenciler durum sayısal olarak verilmediğinde işlemlerin nasıl yapılabileceği ile ilgili muhakeme yapmaya başlayabilirler. Bu çalışmalar öğrencilerin gerçek yaşam durumlarını modellemede kullanışlı bir araç olarak cebiri anlamalarının ve aritmetik ile ilişkilerini kurmalarının onların aritmetikten cebire geçişini kolaylaştıracağını ifade etmektedirler (Baroudi, 2006; Cai ve Moyer, 2007; Dettori, Garuti ve Lemut., 2001; Kieran, 2004; Nickson, 2004).

Cebir öğrenimi ile ilgili birçok araştırma yapılmasına rağmen, eğitimciler cebir öğrenmeden önce öğrencilerin ne yapabileceği konusuna tam hâkim değildirler (Baş, Çetinkaya ve Erbaş, 2011). Öğrencilerin cebir öğrenmeden önceki ön bilgileri yeni inşa edilecek cebir bilgisine bir temel teşkil edecektir (Gürbüz ve Akkan, 2010; Herscovics ve Linchevski, 1994; Kieran, 1992). Blanton vd. (2007) göre cebirsel düşünme, kavramlara daha derinlemesine dalarak çocukların matematiksel anlamalarına bir anlam, derinlik ve uyum getirmektedir. İlköğretimdeki öğrenciler sembolik manipülasyonlarla bazı becerilerini geliştirebilirken amaç cebirsel olarak düşünmeyi öğrenmek ve sembolik bir kazanım elde etmek yerine fikirlerini, düşüncelerini ifade etme ve kanıtlamada cebirsel bir dil kullanmalarını sağlayabilmektir.

Öğrenciler formal eğitim almadan önce matematiksel problem çözmede kendi sahip oldukları informal fikir ve metotları vardır. Cebir öğrenmeden öncede o ana kadar aldıkları matematik bilgisiyle, çözmek için orantı, lineer ilişki gibi cebirsel işlemler gerektiren problemleri sezgisel olarak çözebilmektedirler. Yani öğrenciler cebir öğrenimi görmeden de bu tür problemlere çözüm üretebilmektedir. Yapılan araştırmalar öğrencilerin cebir öğrenmeden önce yalın semboller veya değişkenleri kullandıklarını (Booth ve Johnson, 1984; Herscovics ve Chalouh, 1984), sezgisel olarak denklem çözme metotları kullandıklarını (Swafford ve Langrall, 2000), öğrendikleri kural ve özellikleri uygulamada sezgisel olarak yetenekli olduklarını (Swafford ve Langrall, 2000), eşit işaretini kendi yorumlarıyla kullandıklarını (Behr, 1980; Carpenter ve Levi, 2000; Falkner, Levi ve Carpenter, 1999; Yaman Toluk ve Olkun, 2003) ve sembollerini gruplandırabildiklerini (Carpenter ve Levi, 2000; Swafford ve Langrall, 2000) göstermektedir.

Cebir öğrenimi almamış öğrenciler aslında denklem içeren toplanan, eksilen, çıkan, çarpan, bölünen, bölenin bilinmediği işlemlerle eğitim ve günlük hayatlarında karşılaşmaktadırlar. Bu tür durumlara karşı öğrencilerin çözüm üretebildikleri fakat bazı sorunlar yaşadıkları görülmektedir (Falkner, Levi ve Carpenter, 1999; Yaman, Toluk ve Olkun, 2003). Bu sorunların giderilmesi için de matematik programlarında erken dönemlerde de cebir içeriklerinin yer alması gerektiği ifade edilmektedir (NCTM, 2000). Ülkemizdeki Ortaokul 5-8. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı incelendiğinde cebir konularının 6. sınıfta yer aldığı denklemlere geçişin ise 7. sınıf konuları arasında olduğu görülmektedir (MEB, 2013).

Bu nedenlerle “Cebir eğitimi almamış 5. sınıf öğrencileri denklem içeren sözel problemlerle karşılaştıklarında ne yapmaktadırlar? Bu problemleri çözerken nasıl bir çözüm stratejisi oluşturmaktadırlar?” sorularına cevap aramak önemli görülmektedir. Bu çalışmanın amacı öğrencilerin, cebir öğrenimi görmeden önce karşılaştıkları problem durumlarını tanımlama ve temsil etmede denklemleri kullanıp kullanamadıklarını araştırmaktır.

Yöntem

Araştırmanın Deseni

Araştırmada cebir eğitimi almamış öğrencilerin denklem kullanımı ile ilgili bilgilerinin ortaya çıkarılması amaçlandığı için nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması modeli kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2011: 39).

Örneklem

Araştırmada amaçlı örneklem seçiminden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2011: 112). Araştırma Bolu ilinin sosyo-ekonomik düzeyi orta seviyede olan bir ilçesindeki bir ilköğretim okulunun 5. sınıflarında uygulanmıştır. Araştırmaya katılacak öğrencilerin seçimi için matematik başarısı yüksek seviyede (matematik notu 4 ve 5 olanlar alınmıştır) olan öğrenciler gruplanmış ve bu gruptaki öğrencilerden öğretmenlerinin yardımıyla toplam 8 öğrenci (4’ü kız, 4’ü erkek) seçilmiştir. Matematik başarısı zayıf olan öğrencilerin yaptıkları çözümleri açıklama süreçleri daha uzun zaman alabileceği ve diğer düzeydeki öğrencilerin yaptıkları işlemleri sözel olarak ifade etmede sorun yaşamayacakları, öğretmenleri ve araştırmacılar tarafından düşünülerek matematik başarısı yüksek seviyede olan öğrenciler bu araştırmaya katılmıştır.

Prosedür

Araştırmaya katılan bütün öğrencilerin ailelerinden izin alınmıştır. Araştırmada, her bir çocukla birer ders saati (40 dk) olmak üzere bir nitel veri toplama tekniği olan yarı yapılandırılmış görüşmeler kullanılmıştır (Büyüköztürk vd., 2012: 152). Görüşmeler ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Görüşmelerde, öğrencilerin sözel problemleri tanımlamada ve temsil etmede denklemleri kullanıp kullanamadıklarını ortaya çıkaracak 4 tane sözel problem sorulmuştur. Bu problemler doğru orantı, ters orantı, lineer ilişki ve üslü sayılar konularını içermektedir.

Her bir problem için ilk önce öğrencilerden verilen sayısal değerleri probleme yerleştirerek bir çözüm üretmeleri, sonra bu çözüme nasıl ulaştıklarını anlatmaları ve genel bir denklem yazmaları istenmiştir. Son olarak da öğrencilere problemle ilgili sayısal birkaç soruyu kendi kurduğu denklemle çözmeleri söylenmiştir. Öğrencilerin ilk önce problemlerin sayısal durumlarını nasıl çözdüğü incelenmiştir. Sonra öğrencilerin ilişkileri nasıl genelledikleri araştırılarak daha önce bulduğu sayısal çözümü nasıl bulduğunu sözel olarak açıklamaları istenmiştir. Daha sonra öğrencilerin problem durumunu temsil edecek sembollerle bir denklem yazmaları söylenmiştir. Bu aşamada denklemin ne olduğu ile ilgili öğrencilere bir bilgilendirme yapılmıştır. Öğrencilerden bu aşamada verilen sayısal olmayan durumu genellemeye çalışmaları ve buldukları genellemeleri matematik cümlesi şeklinde yazmaları istenmiştir. Son olarak da yazdıkları bu denklemleri/matematik cümlelerini verilen özel sayısal durumlar için kullanıp kullanamadıklarına bakılmıştır.

Görüşmelerde sorulacak soruların bir kısmı araştırmacılar tarafından geliştirilirken bir kısmı daha önce yapılmış çalışmalardan uyarlanmıştır. Sorulacak sorular alan uzmanları tarafından kontrol edilerek kapsam geçerliği sağlanmıştır.

Görüşmeler

Görüşmelerde öğrencilere problemler yazılı olarak verilmiş ve her bir problemdeki soruları cevaplamaları istenmiştir. Öğrencilere soruları çözmeleri için kâğıt, kalem ve hesap makinesi verilmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan yola çıkılarak öğrenciyi zorlamayacak ek sorular sorulmuştur. Her bir görüşme en fazla bir ders saati sürmüş ve ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Daha sonra bu kayıtların çözümlemesi yapılmıştır.

Görüşmelerde Sorulan Sorular

1) Değirmen ve Buğday Problemi (Doğru Orantı)

Bir değirmende günde 5 ton buğday öğütülmektedir.

- Bu değirmen 8 gün çalıştığında kaç ton buğday öğütülür?
- Cevabını nasıl açıklarsın?
- G değirmenin çalıştığı gün sayısını, T’de kaç ton buğday öğütüldüğünü gösterebilirsin. Öğütülen buğday miktarını veren bir denklem yazınız.
- Sizin denkleminiz, 25 ton buğday öğütmek için değirmenin kaç gün çalışması gerektiğini bulmak için kullanılabilir mi?

2) Temizlik Problemi (Ters Orantı)

12 temizlikçi bir villayı bir saatte temizlemektedir.

- 6 temizlikçi aynı villayı kaç saatte temizleyebilir? 3 temizlikçi kaç saatte temizleyebilir? 24 temizlikçi kaç saatte temizleyebilir?
- Cevabını nasıl açıklarsın?
- S çalışma saatini T’de temizlikçi sayısını temsil etsin. Temizlikçilerin bu villayı temizlemek için ne kadar çalışması gerektiğini gösteren bir denklem yazınız.
- Yazdığımız denklem 5 temizlikçinin bu villayı kaç saatte temizleyeceğini bulmak için kullanılabilir mi?

3) Duvarcı Ustası Problemi (Lineer İlişki)

Bir duvarcı ustası şu ana kadar 25 m^2 ’lik duvar örmüştür. Bu usta her saatte 3 m^2 duvar örmektedir.

- Usta 5 saat çalıştığında toplam kaç m^2 duvar örmüş olur?
- Cevabını nasıl açıklarsın?
- S saati, D’de örülen toplam duvar miktarını temsil etsin. Her bir saat için örülen toplam duvar miktarını veren bir denklem yazınız.
- 10 saat çalıştığında kaç m^2 duvar öreceğini bulmak için sizin denkleminiz kullanılabilir mi?

4) Kâğıt Katlama Problemi (Üslü Sayılar)

Herhangi bir boş bir kâğıdı ortasından ikiye katlayın ve sonra açın. Kaç bölge oluştu?

- a) Kâğıdı iki kez katlayınca kaç bölge oluşur? Üç kez katlayınca kaç bölge oluşur?
- b) Cevabını nasıl açıklarsın?
- c) B bölge sayısını K'de katlama sayısını gösterebilirsin. Herhangi bir katlama sonucunda kaç bölge oluşacağını bulabileceğimiz bir denklem yazınız.
- d) Kâğıdı 6 kere katladığımızı düşünelim. Kaç bölge oluştuğunu bulmak için sizin yazdığımız denklemi kullanabilir miyiz?

Veri Analizi

Öğrencilerin problemlere verdikleri cevapların kayıtları incelenerek çözümlenmesi yapılmıştır. Ayrıca çocukların görüşmelerdeki problemleri cevaplamada kullandığı değişik uygulamalar ve araştırmacının almış olduğu notlar analiz edilmiştir.

Analiz yöntemi olarak betimsel analiz yöntemi uygulanmıştır. Analiz iki aşamadan oluşmuştur. Birinci aşamada her bir çocukla yapılan görüşmeler çözümlenmiş, ikinci aşamada ise, toplam veri birkaç kez okunduktan sonra, her bir çocuğun denklemleri kullanıp kullanmadığı hakkında çıkarımlarda bulunularak veri içinde bu çıkarımları destekleyecek ya da çürütecek kanıtlar aranmıştır. Her bir öğrenci için bu süreç tamamlandıktan sonra, öğrenciler arasındaki ortak eğilimler ve denklemleri nasıl kullandıkları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Kodlama her bir soru için özel sayısal durumlar için çözümler, çözüm sürecini açıklama, denklem kurabilme ve denklemi sayısal durumlar için kullanabilme olmak üzere 4 kategoride yapılmıştır.

Bulgular

Bu çalışmaya katılan beşinci sınıf öğrencilerinin belli kalıplardaki problemlerde genelleme yapabildikleri görülmüştür. Öğrenciler cebir öğrenmeden önceki sürede okuldaki derslerinde sadece sayısal durumları çözmekte ve genelleme yapmamaktadırlar. Bu çalışmada öğrencilerin genelleme yapıp yapamadıkları incelenmiştir. Tablo 1'de, araştırmaya katılan öğrencilerin görüşmelerde sorulan sorulara verdikleri cevapların doğruluğu ve yanlışlığı hakkında bilgiler verilmektedir.

Görüşmelerde sorulan soruları başarıyla cevaplayan öğrencilerin sayısı aşağıdaki grafikte (Bkz. Şekil 1) görülmektedir.

Öğrencilerin sorulara verdikleri cevaplar aşağıdaki sıraya göre incelenmiştir.

- 1) Sayısal Durumların Çözümü
- 2) Cevabı Açıklama
- 3) İlişkiyi Kurabilme (Denklem Yazabilme)
- 4) Denklemi Kullanabilme

Tablo 1: Öğrencilerin Görüşmelerde Verdikleri Cevapların Doğru ve Yanlışlığı

	Değirmen ve Buğday Prb.				Temizlikçi Prb.*			
	a	b	c	d	a	b	c	d
E1	+	-	+	+	-	-	-	-
E2	+	+	+	+	+	+	+	+
E3	+	+	+	+	+	-	+	+
E4	+	-	+	+	+	-	+	+
K1	+	+	+	+	+	-	+	+
K2	+	+	+	+	-	-	-	-
K3	+	+	+	+	+	+	+	+
K4	+	+	+	+	+	+	+	+

	Duvarcı Ustası Prb.				Kâğıt Katlama Prb.**			
	a	b	c	d	a	b	c	d
E1	+	+	+	+	+	+1	-	-
E2	+	+	+	+	+	+2	-	-
E3	+	+	+	+	+	+2	+	+
E4	+	+	+	+	+	+1	-	-
K1	+	+	+	+	+	+2	+	+
K2	+	+	+	+	+	+2	-	-
K3	+	+	+	+	+	+2	-	-
K4	+	+	+	+	+	+2	+	+

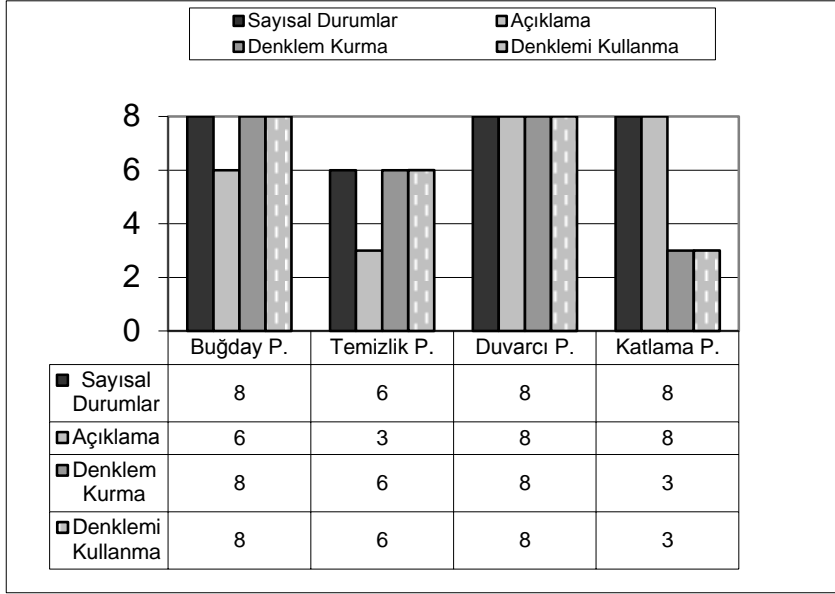
* Öğrencilere ters orantı konusunda yönlendirme yapıldı.

** Öğrencilere üslü sayılar konusunda yönlendirme yapıldı.

¹ İlişkiyi “Hep 2 katı artıyor” diyerek açıklayanlar

² İlişkiyi “Sayılar hep birbiri ile toplanarak ilerliyor” diyerek açıklayanlar

Şekil 1: Soruları Doğru Cevaplayan Öğrencilerin Sayısı



Sayısal Durumların Çözümü:

Öğrencilerin tümünün doğru orantı içeren Değirmen ve Buğday Probleminde, lineer ilişki içeren Duvarcı Ustası Probleminde ve üslü sayı ilişkilerini içeren Kâğıt Katlama Probleminde doğru cevap verdikleri görülmüştür (Bkz. Tablo 1). Fakat çoğu öğrenci (4/4 kız, 1/4 erkek) ters orantı içeren Temizlikçi Probleminde sorun yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Bu öğrencilerin tümü 12 temizlikçinin 1 saatte temizlediği bir villayı 6 temizlikçinin yarım saatte temizleyeceğini söylemişlerdir. Aşağıda öğrencilerin bu soruya verdikleri cevaplardan bazı alıntılar bulunmaktadır.

K₄: (soruyu okudu) Yarım saat olması lazım

A: Nasıl yaptın?

K₄: 12 temizlikçi 1 saatte temizliyorsa 12, 6'nın yarısı onlarda yarım saatte.

E₁: (okudu) Yarım saatte temizler.

A: Nasıl yaptın, yap bakalım

E₁: İlk önce 12yi 6, yani 6, 12nin yarısı olduğunu düşündüm; sonra 6, 12'nin yarısı olduğuna göre yarım saatte 1 saatin yarısıdır.

Araştırmacı, öğrencilerin ters orantı konusunda eksik olduklarını düşünerek görüşme sırasında, “Bak şimdi ikimiz birlikte buradaki koltukları dışarı çıkaracağız. Beraber 10 dakikada çıkarıyoruz. Sen tek başına kaç dakikada çıkarırsın?” diyerek bir yönlendirme yapmıştır. Bu yönlendirme sonucunda bir kız ve bir erkek haricinde bütün öğrenciler doğru cevabı bulmuşlardır.

K₄: Ben 20 dakikada

A: O zaman bu soruyu bir daha oku bakalım.

K₄: (...)2 saatte.

A: 2 saatte. Nasıl yaptın?

K₄: 12 kişi daha çabuk taşır fazla kişi olduğundan. 6 kişi ise biraz daha uzun sürer.

E₁: 20

A: 20 dk da. Peki, bu soruya bir daha bak bakalım. Soruyu bir daha oku.

E₁: 6 saat olması gerekiyor. Pardon 2 saat olması gerekiyor.

Görüşmeler sırasında, kız öğrencilerden birinin Buğday ve Değirmen Probleminde soruyu çözmek için bütün işlemleri sırasıyla kullanmaya çalışması dikkat çekmiştir. Önce toplama, sonra olmayınca çarpma yapmış ve sonra da hangisinin doğru olduğu konusunda sıkıntı çekmiş fakat sonunda doğruyu bulmuştur.

K₂: 5 ton o zaman. 8 tonla toplarsak. Ayy 8 günle. 8 gün çalıştıyla onu toplarsak 13 . . . 5 tonla 3 tonu toplarım, 8 . . . O zaman bu değil. Yaaa çarpsam olmaz mı? (içinden işlem yapıyor) 5 tonla 3 günüy çarparsam 5 kere 3, 15 . . . Yaaa biri ama hangisi. Yaaa toplama olur belki.

Bu öğrencinin belki de matematiği bir işlem dersi olarak gördüğünü söyleyebiliriz. Öğrenci bir problemle karşılaştığında bazı işlemler yapması gerektiğine inanmaktadır. Fakat hangi işlemi uygulayacağını tam olarak bilemediği yapılan görüşmelerden anlaşılmaktadır (Greer, 1997).

Öğrencilerin problemlerin bu şıkında fazla problem yaşamamış olmalarını derslerde devamlı sayısal durumlarla ilgili problem çözmelerine ve genelleme yapmaları gereken durumlarla karşılaşmalarına bağlayabiliriz.

Cevabı Açıklama:

Öğrencilerin sözel ifade yeterlilikleri ile ilgili bu bölümde, yaptıkları işlemleri açıklamaları, kurdukları ilişkileri anlatmaları istenmiştir. Görüşme kasetleri çözümlendiğinde, cevabı açıklamada kız öğrencilerin erkek

öğrencilere oranla daha başarılı olduğu gözlenmiştir. Erkekler 11/16 cevaplarını açıklayabilirken kızlarda bu oran 14/16'dır. Aşağıda her soru için öğrenci görüşlerinden alıntılar yapılmıştır.

1) Değirmen ve Buğday Problemi

(A: Peki nasıl yaptın?)

E₁: Düşünerek hocam (-)

E₄: Daha kısa ve daha net olduğu için çarpma yaptım. (-)

E₃: 1 günde 5 ton öğüttüğüne göre 8 günde kaç ton öğüttüğünü bulmak için 8 ile 5'i çarptım. (+)

K₁: Çarpıyorum. Çünkü her gün 5 ton 5 ton (+)

K₄: Çarptım. Çünkü bir günde 5 tane yapıyorlar. 8 günde de her gün 5 tane yaptıklarına göre... (+)

E₃'ün neden çarpma işlemi yaptığını yukarıdaki gibi açıklamasını, bir önceki bölümde K₂'nin düşündüğü gibi düşünmüş olmasına yani matematiği bir işlem dersi olarak görmesine bağlayabiliriz.

2) Temizlikçi Problemi

Öğrenciler bu problemin a şikkında genelde sorun yaşadıkları için cevaplarını açıklamada da zorluk çektikleri görülmüştür.

(A: Nasıl yaptığını açıklayabilir misin?)

E₄: 12. 12 temizlikçi 1 villayı 1 saatte ise 12'nin yarısı 6. 6 temizlikçi 2 saatte temizler. (Bu öğrenci a şikkını doğru yapmış olmasına rağmen cevabını açıklayamamıştır.)

K₃: 12 temizlikçi 1 saatte temizlediğine göre 6 temizlikçi daha fazla zamanda temizlemesi gerekiyor. O yüzden 12 temizlikçiyi 6'ya böleriz.

K₄: 12 kişi daha fazla, daha çabuk taşırlar. 6 kişi biraz daha az olduğu için biraz daha geç temizler.

3) Duvarcı Ustası Problemi

Bu problemde araştırmaya katılan bütün öğrenciler cevaplarını açıklayabilmişlerdir.

(A: Nasıl yaptığını açıklayabilir misin?)

E₂: 5 ile 3'ü çarptım, 15. Her saatte 3 m² duvar ördüğü için. Şu ana kadar da 25 m²'lik duvar ördüğü için 25 ile 15'i topladım.

K₄: Usta saatte 3 m² ördüğüne göre 5 saatteyi bulmak için 5 ile 3'ü çarpıp kaç m² ördüğünü buluruz. Şu ana kadar 25 m² ördüğüne göre şimdi de 15 m² ördü. Toplarım toplam duvar miktarını bulurum.

4) Kâğıt Katlama Problemi

Bu problemde ise toplam veriden öğrencilerin b şikkına iki çeşit açıklama getirdikleri görülmüştür. Birinci açıklamada öğrenciler katlama sayısı arttıkça bölge sayısının, bir önceki bölge sayısının kendi kendisiyle toplanarak elde edildiğini söylemişlerdir (Erkekler 2/4, kızlar 4/4).

(A: Nasıl yaptın? Anlatır mısın?)

E₃: 32'yi 32 ile topladım, 16'yı 16 ile topladım . . . (geriye doğru gidiyor)

K₁: Şimdi ben burada 2-2, 4; sonra da 4-4, 8 olur. Sonra 4. katlamada 8-8, 16 olur. Sonra 5. katlamada 16-16, 32 olur.

İkinci açıklamada ise öğrenciler bir sonraki katlamada oluşacak bölge sayısının, bir önceki katlamada oluşan bölge sayısının 2 katı olduğunu söylemişlerdir (Erkekler 2/4, kızlar 0/4).

(A: Nasıl yaptın? Anlatır mısın?)

E₄: Her bir basamak artışında onun iki katı oluyor. 2'nin 2 katı 4. 4'ün 2 katı 8. 8'in 2 katı 16. 16'nın 2 katı 32. 32'nin 2 katı 64.

Problemlerin b şikkında öğrenciler yukarıdaki gibi cevaplar vermişlerdir. Öğrencilerin açıklamalarının genelde işlemleri nasıl yaptıklarıyla ilgili olduğu görülmektedir. Yani problemlerin a şikkını çözerken kullandıkları işlemleri açıklamaya çalışmışlardır. Bir tek Kâğıt Katlama Probleminde herhangi bir işlem yapmayıp uygulama yaparak sonuca ulaştıklarından cevaplarını ilişkisel olarak açıklamışlardır. Yani bu soruda buldukları cevapların birbiriyle ilişkisini düşünüp ona göre cevaplarını açıklamışlardır.

Problemlerin cevabı açıklama şikkında Tablo 1'de de görüldüğü gibi kızlar verdikleri cevapları daha iyi ifade etmişlerdir. Bu da kızların erkeklere oranla sözel beceri gerektiren problemlerde daha başarılı olduğunu gösterebilir.

İlişkiyi Kurabilme (Denklem Yazabilme):

Öğrencilerin her bir soru için yazdığı sembolik denklemler Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2’ye bakıldığında erkek öğrencilerin kız öğrencilere oranla sembolik ifadelerde daha iyi olduğu ortaya çıkmaktadır. Sadece 4. problemde 2 kız öğrenci doğru cevabı bulurken sadece 1 erkek öğrenci doğru cevabı bulabilmiştir. Bunun nedeni araştırmaya katılan erkek öğrencilerin üslü sayıları anlamada sorun yaşamaları olabilir. Fakat veri incelendiğinde erkek öğrencilerin sembolik gösterimlere ulaşmada kız öğrencilerden daha hızlı ve daha düzenli oldukları gözlenmiştir. Özellikle Duvarcı Ustası Probleminde kız öğrenciler birden fazla işlem yapılması gerektiği için denklemi iki seferde yazmışlardır. Fakat erkek öğrenciler denklemi iki işlemi de içerecek şekilde bir kere de yazabilmişlerdir. Şimdi de her bir soru için öğrencilerle yapılan görüşmelerden alıntılara bakalım.

Tablo 2: Araştırmaya katılan öğrencilerin problemlerin c şıkına verdiği cevaplar

	1. Prb.	2. Prb.	3. Prb.	4. Prb.
E1	$T=Gx5$	-	$D=Sx3+25$	-
E2	$Gx5=T$	$12:T=S$	$Sx3+25=D$	-
E3	$Gx5=T$	$12:T=S$	$3xS+25=D$	$2^K=B$
E4	$5xG=T$ alt alta	$12/T=S$ normal bölme	$Sx3=D$ ve $D+25=...$ alt alta	-
K1	$Gx5=T$ alt alta	$12/T=S$ normal bölme	$Sx3=D$ ve $D+D=D$ yan yana	$B=2^K$
K2	$Gx5=T$ alt alta	-	$Sx3=D$ ve $D+25=T$ alt alta	-
K3	$Gx5=T$ alt alta	$12/T=S$ normal bölme	$Sx3=D$ ve $D+25=...$ alt alta	-
K4	$Gx5=T$ yan yana	$12:T=S$	$Sx3=D$ ve $D+25=...$ yan yana	$B=2^K$

1. Değirmen ve Buğday Problemi

Bu problemde bütün öğrenciler bir denklem yazabilmişlerdir. Öğrencilerin, a şikkındaki sayısal durumları nasıl buldularsa yazdıkları denklemleri de buna benzettikleri görülmüştür. a şikkında çarpmayı alt alta yaparak cevabı bulduysalar denklemi yazarken de alt alta yazmışlardır (Tablo 2).

A: Gün sayısı ne verilmiş bize?

E₄: G

A: O zaman işlemi yap

E₄: 5 çarpı G

A: Bu da neyi veriyordu bize

E₄: Tonunu

A: Peki tonu hangi harfle göstermişiz?

E₄: T (5 x G = T alt alta yazdı)

2. Temizlikçi Problemi

Bu problemde bir erkek ve bir kız öğrenci sayısal durumları çözemediği için denklemde kuramamışlardır.

A. Saati hangisi gösteriyormuş?

K₃: S

A. Temizlikçi sayısını hangisi gösteriyormuş?

K₃: T

A. O zaman yerlerine koyabilir misin?

K₃: Denklemi yazdım. (12 : T = S yazdı)

A. Nasıl? Oku.

K₃: 12 bölü temizlikçi eşittir saat

3. Duvarcı Ustası Problemi

Erkek öğrenciler bu problemde genelde problemde yapılması gereken iki işlemi içeren tek bir denklem kullanmışlardır. Kız öğrencilerin hepsi ise iki işlemi ayrı ayrı kullandıkları standart olmayan ikişer denklem yazmışlardır.

E₁: S ile 3ü çarpmam lazım.

A: Yaz bakalım. Sonra ne yapıyordun?

E₁: 25 ile bulduğum sonucu topluyordum.

A: Tamam o zaman ne olacaktı?

E₁: Artı 25

A: O zaman yaz

E₁: ($S \times 3 + 25$ yazdı)

A: Bu bize neyi verecek? Neyi vermesi lazım?

E₁: Toplam duvar miktarını

A: Onu neyle göstermişiz?

E₁: D ile ($D = S \times 3 + 25$ yazdı)

A: Tamam c şikkını oku bakalım.

K₃: (okudu) (...) ($S \times 3$ yazdı)

A: Evet. Söyle ne yaptığını.

K₃: S saatin miktarını, kaç saat olduğunu belli ediyor. 1 saatte $3 m^2$ yapmış, yazarız. D'de örülen toplam duvar miktarını temsil ediyor. D yazarız.

A: Tamam. Sonra ne yapman lazım?

K₃: Her bir...25 ile sonucu toplayacam. ($S \times 3 = D$ ve $D + 25 = T$ yazdı)

Bu problemde S saati, D'de örülen toplam duvar miktarını gösteriyor. Fakat K₃, D+25'i kendi uydurduğu T'ye eşitliyor (büyük ihtimalle T, toplamı ifade ediyor).

4. Kâğıt Katlama Problemi

Araştırmacı görüşmeler sırasında öğrencilerin bu problemle üslü sayıları ilişkilendiremediğine inanarak onları yönlendirmiştir. Yönlendirmede öğrencilere sadece üslü sayılar hatırlatılmıştır.

A: Peki ben sana yardımcı olayım. Şu nedir? (2^1)

K₁: 2 üssü 1

A: Nedir buda?

K₁: 2 üssü 1. 1 tane 2

A: 2 üssü 2

K₁: 2 tane 2

Bütün öğrencilere yukarıdaki alıntıda olduğu gibi yönlendirme yapılmıştır. Bu yönlendirme sonucunda sadece 2 kız ve 1 erkek öğrenci bu problem için bir denklem yazabilmiştir.

A: O zaman K. katlamada ne olur? K sefer katladım.

K₁: 2 üzeri K olacak

A: Nedir bu 2 üzeri K?

K₁: B, bölge sayısı ($B = 2^K$ yazdı)

Denklemleri Kullanabilme

Bir problem için denklem yazabilen, genelleme yapabilen öğrenciler o problem için denklemleri kullanabilmiştir. Fakat öğrencilerin bazıları verilen sayısal değeri yerine koyarak, kimisi de zihinden yaparak soruyu çözmüştür. Özellikle Değirmen ve Buğday Probleminde sorulan soru ters işlem yapmayı gerektiriyordu. Bu yüzden bazı öğrenciler Denklemlerde G yerine ne yazılması gerektiğini düşünerek soruyu çözmüşlerdir.

A: Bir de şuradaki soruyu oku. (d şıkkı)

E₁: (okudu)5 gün

A: 5 gün çalışırsa

E₁: 25 tonu bulur. ($T = 5 \times 5 = 25$ yazdı)

Bazı öğrenciler ise direk zihinden işlem yapmış ve 25'i 5'e bölmüşlerdir. Kız öğrencilerden biri ise cevabı zihinden yaparak söylemiştir. Fakat denklemleri kullanıp kullanamayacağı sorulduğunda denklemin de tersinin alınması gerektiğini söylemiştir.

K₄: 25i 5e bölerim. Ters işlem yaparım. (yazdı)

A: Peki denklemini mi kullandın yoksa zihinden mi yaptın?

K₄:Zihinden

A: Peki denklemini kullanabilir misin?

K₄:Denklemin tersini

A: Nasıl yaparsın?

K₄:Şey tonu 5e bölerim.

A: Tonu 5e bölersen neyi verir sana?

K₄:Günü verir.

Temizlikçi Probleminde 12'nin 5'e bölünmesi gerekiyordu. Gerekli değerleri kendi denklemlerinde yerine koymuş ve sonucu bulmuşlardır. Çoğu öğrenci çıkan 2,4 sonucunu 2saat 4 dakika olarak okumuşlardır.

Duvarcı Ustası Probleminde ise özellikle erkek öğrenciler denklemlerini tek yazdıkları için verilen değeri de denklemdeki sırasına göre yerleştirmiş ve sonucu bulmuşlardır.

E₂: 10. Çarpı, hep 3 ile çarpıyorduk artı 25 eşittir 30, 30 ile 25i topladım 55. (3 x 10 + 25 = 55 yazdı)

Kâğıt katlama probleminde ise denklem kurabilen 3 öğrencide katlama sayısı olan 6'yı kendi denklemlerinde yerine koyarak cevabı bulmuşlardır.

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Öğrencilerin özellikle testteki doğru orantı, lineer ilişki ve üslü sayılar konularındaki sorularda sayısal işlem yapmada yeterli oldukları ortaya çıkmıştır. Ters orantı içeren soruda ise sorun yaşadıkları bulunmuştur. Bunun nedeni 5. sınıf ve öncesi matematik dersi öğretim programında ters orantı konusunun geçmemesi olabilir. Duatepe, Akkuş-Çıkla ve Kayhan (2005) tarafından yapılan çalışmada bu araştırmanın sonucuyla tutarlı olarak ortaokul öğrencilerinin özellikle ters orantı içeren sorularda sorun yaşadıkları, bu tip sorularda içler dışlar çarpımı yaparak sonuca ulaşmaya çalıştıkları ifade edilmektedir. Bu çalışmada ters orantı sorusunda öğrencilerin sadece %32'sinin ters orantı algoritması kullandığı ortaya çıkmıştır. Ayrıca lise öğrencileri ile yapılan bir başka çalışmada da öğrencilerin ters orantı içeren problemlerde sorunlar yaşadıkları ifade edilmiştir (Doğan ve Çetin, 2009). Ortaokul ve lise öğrencilerinin ters orantı konusunu öğrenmesine rağmen bu konuda hatalar yaptıkları görülmektedir. Bu konuyu öğrenmemiş olan sadece sezgisel olarak cevaplamaya çalışan 5. sınıf öğrencilerinin de bu tür sorularda sorun yaşamaları normal karşılanabilir. Lundberg (2011) orantı denildiğinde genellikle doğru orantıdan bahsedildiğini söylemektedir. Yapılan çalışmalarda öğrencilerin doğru orantı içeren soruları cevaplamada ters orantı sorularına göre daha başarılı oldukları görülmektedir (Singh, 2000). Matematik öğretmenleri ile yapılan bir çalışmada ise öğretmenlerin doğru orantı içeren problemlerde ters

oranı içeren problemlere göre daha başarılı oldukları bulunmuştur (Fisher, 1988).

Bu çalışmada 5. sınıf öğrencilerinin üslü ifade içeren soruda genellikle toplama yaparak sonuca ulaştıkları görülmüştür. Yapılan benzer bir çalışmada öğrenciler sayısal üslü ifadeler içeren soruları cevaplarırken büyük yaştaki öğrencilerin çarpımsal bir model, küçük yaştaki öğrencilerin ise toplamsal bir model kullandıkları görülmüştür (Maria Teresa Munoz ve Mullet, 1998). Bu da araştırmanın sonuçları ile tutarlı görülmektedir. Ayrıca sayısal olarak lineer ifade içeren sorularda da öğrencilerin doğru orantı kullanarak bu tür soruları doğru cevaplayabildikleri görülmüştür (Barbosa, Palhares ve Vale, 2007).

Araştırmaya katılan öğrencilerden görüşme sırasında sorulan sorulardaki sayısal durumlar için verdikleri cevapları nasıl verdiklerini açıklamaları istenmiştir. Öğrenciler genelde yaptıkları işlemleri açıklamaya çalışmışlardır. Öğrencilerin tümü lineer ilişki ve üslü sayılarla ilgili sorulara verdikleri cevapları nasıl düşünerek verdiklerini açıklayabilmişlerdir. Özellikle ters orantı sorusunda öğrencilerin cevaplarını sözel olarak açıklamakta zorlandıkları görülmüştür. Araştırma sırasında, kız öğrencilerin erkek öğrencilere oranla yaptıkları işlemleri daha rahat açıklayabildikleri görülmüştür. Bu da literatürün de desteklediği gibi kızların sözel becerilerinin erkeklere oranla daha gelişmiş olduğunu gösterebilir (Post, 1992: 452). Aynı şekilde sembolik ifadelerde de erkeklerin kızlara göre daha üstün olabildiği görülmektedir (Post, 1992: 453). Yine literatürün de desteklediği gibi bazı öğrencilerin matematiği bir işlem dersi olarak gördüğünü ve yaptığı işlemleri açıklamakta zorlandıkları görülmüştür (Greer, 1997).

Öğrenciler cebir öğrenmeden önceki ön bilgileri ile sayısal çözümünü yapabildikleri problemlerde genellemeler yapabildikleri ortaya çıkmıştır. Özellikle çözüm sürecini açıklayabildikleri sorularda genellemeleri daha rahat yapabildikleri ve denklemleri daha rahat kurdukları görülmüştür. Öğrencilerin denklemleri yazarken sezgilerini kullandıkları ortaya çıkmıştır. Ayrıca kız öğrencilerin lineer ilişki içeren soruda denklemi iki işlemde kurmaya çalıştıkları görülmüştür. Benzer şekilde Swafford ve Langrall'de (2000) yaptıkları çalışma sonucunda öğrencilerin denklem çözme metotlarını sezgisel olarak kullandıklarını ortaya çıkarmışlardır. Yapılan bazı çalışmalarda da öğrencilerin cebir öğrenmeden önce de aritmetik işlemlerde yalın semboller veya değişkenler kullandıkları (Booth ve Johnson, 1984; Herscovics ve Chalouh, 1984) ve sembolleri ve değişkenleri gruplandırarak

genellemeler yapabildikleri (Carpenter ve Levi, 2000) ortaya çıkmıştır. Bu sonuçlar çalışmanın sonuçları ile tutarlık göstermektedir.

Öğrencilerle yapılan görüşmeler sonucunda öğrencilerin yazdıkları denklemleri kullanarak verilen sayısal değerler için çözüm bulabildikleri ortaya çıkmıştır. Bazı öğrenciler yazdıkları denklemde sayıları yerine koyarak cevabı bulurken bazı öğrenciler zihinden işlem yaparak sonuçları bulmuştur.

Cebire geçiş yapmadan önceki derslerde öğrenciler aldıkları eğitim nedeniyle sayılarla işlem yapma alışkanlığı kazanmaktadırlar. Bu alışkanlıkta ileriki cebir derslerinde onlar için sorun yaratmaktadır. Bu alışkanlığın oluşmasını önlemek için cebir öncesi dönemde cebirsel fikirleri ortaya çıkaracak etkinlikler hazırlanmalı ve bu etkinlikler derslerde kullanılmalıdır. Derslerde öğretmenler, öğrencilerinden çözüm süreçlerini açıklamalarını ve bazı problemlerde genelleme yapmalarını isteyebilir. Bu çalışma 5. sınıflarla kısıtlı olmasına karşın benzer bir çalışma ilköğretimin birinci kademesinde de yapılabilir. Bunu yanında öğretmenlerin bu tür sözel problemleri öğrencilere anlatırken nasıl bir tutum izledikleri, nasıl bir strateji izledikleri de araştırılabilir.

KAYNAKÇA

- Barbosa, A., Palhares, P., Vale, I. (2007). *Patterns and Generalization: The Influence of Visual Strategies*. Paper presented at the Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Larnaca, Cyprus.
- Baroudi, Z. (2006). Easing Students' Transition to Algebra. *Australian Mathematics Teacher*, 62(2): 28-33.
- Baş, S., Çetinkaya, B., Erbaş, A.K. (2011). Öğretmenlerin Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Yapılarıyla İlgili Bilgileri. *Eğitim ve Bilim*, 36(159): 41-55.
- Blanton, M., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., Davis, F. Et al. (2007). *Early algebra*. In: V.J. Katz (Ed.), *Algebra: Gateway to a Technological Future* (7-25). Washington, DC: The Mathematics Association of America.
- Behr, M. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching*, 92: 13-15.

- Bellisio, C., Maher, C.A. (1998). *What Kind of Notations do Children Build to Express Algebraic Thinking?*. Paper presented at the Proceedings of the 20th Annual Conference of the North American Group for the Psychology of Mathematics Education, Raleigh, NC.
- Booth, L.R., Johnson, D.C. (1984). *Algebra: Children' Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor, UK: Nfer-Nelson.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş., Demirel, F. (2012). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (12. Baskı ed.). Ankara: Pegem Yayınları.
- Cai, J., Moyer, J. (2007). *Developing Algebraic Thinking in Earlier Grades: Some Insights from International Comparative Studies*. Reston, VA: NCTM.
- Carpenter, T.P., Levi, L. (2000). Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. *Wisconsin, Madison: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*.
- Cuoco, A., Goldenberg, E.P., Mark, J. (2010). Organizing a Curriculum Around Mathematical Habits of Mind. *Mathematics Teacher*, 103(9): 682–688.
- Dettori, G., Garuti, R., Lemut, E. (2001). From Arithmetic to Algebraic Thinking by Using a Spreadsheet. In: A.B.T. Rojano, R. Ling (Ed.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191-207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer: Springer.
- Doğan, A., Çetin, İ. (2009). Doğru ve Ters Orantı Konusundaki 7. ve 9. Sınıf Öğrencilerinin Kavram Yanılgıları. *Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 2(2): 118-128.
- Duatepe, A., Akkuş Çıkla, O., Kayhan, M. (2005). Orantısal Akıl Yürütme Gerektiren Sorularda Öğrencilerin Kullandıkları Çözüm Stratejilerinin Soru Türlerine Göre Değişiminin İncelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28: 73-81.
- Falkner, K.P., Levi, L., Carpenter, T.P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching children mathematics*, 6(4): 232-236.
- Fisher, L.C. (1988). Strategies Used by Secondary Mathematics Teachers to Solve Proportion Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2): 157-168.

- Greer, B. (1997). Modelling Reality in Mathematics Classrooms: The Case of Word Problems. *Learning and instruction*, 7(4): 293-307.
- Gürbüz, R., Akkan, Y. (2010). Farklı Öğrenim Seviyesindeki Öğrencilerin Aritmetikten Cebire Geçiş Düzeylerinin Karşılaştırılması: Denklem Örneği. *Eğitim ve Bilim*, 33(148): 64-76.
- Herscovics, N., Chalouh, L. (1984). *Using Literal Symbols to Represent Hidden Quantities*. Paper presented at the Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA, Madison: University of Wisconsin.
- Herscovics, N., Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1): 59-78.
- Kieran, C. (1992). *The Learning and Teaching of School Algebra* (I.D.L. Grouws Ed.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics: Handbook of Mathematics Teaching and Learning.
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is It. *The Mathematics Educator*, 8(1): 139-151.
- Lacampagne, C.B., Blair, W.D. Kaput, J.J. (1995). *The Algebra Initiative Colloquium: Papers Presented at a Conference on Reform in Algebra, December 9-12, 1993*. US Department of Education, Office of Educational Research and Improvement, National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment.
- Lundberg, Anna L.V. (2011). *Proportion in Mathematics Textbooks in Upper Secondary School*. Paper presented at the Proceedings of the CERME7 (Teaching and Learning of Number Systems and Arithmetic), Rzeszow, Poland.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2013). *İlköğretim 5-8 Matematik Dersi Öğretim Programı*. TTKB.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.; NCTM.
- Nickson, M. (2004). *Teaching and Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research and its Application* (2nd ed.). New York: Continuum International Publishing Group.
- Post, T.R. (1992). *Teaching Mathematics in Grades K-8. Research Based Methods* (Second Edition ed.): Allyn and Bacon.
- Singh, P. (2000). Understanding the Concepts of Proportion and Ratio among Grade Nine Students in Malaysia. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31: 579-599.

- Swafford, J.O., Langrall, C.W. (2000). Grade 6 Students' Preinstructional Use of Equations to Describe and Represent Problem Situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 89-112.
- Maria Teresa Munoz, S., Mullet, E. (1998). Evolution of the Intuitive Mastery of the Relationship between Base, Exponent, and Number Magnitude in High-School Students. *Mathematical cognition*, 4(1): 67-77.
- Wagner, S., Kieran, C. (1989). *An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra*. Reston, VA.: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.
- Xin, Y., Wiles, B., Lin, Y. (2008). Teaching Conceptual Model—Based Word Problem Story Grammar to Enhance Mathematics Problem Solving. *The Journal of Special Education*, 42(3): 163-178.
- Yaman, H., Toluk, Z., Olkun, S. (2003). İlköğretim Öğrencileri Eşit İşaretini Nasıl Algılamaktadırlar?. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24: 142-151.
- Yıldırım, A., Şimşek, H. (2011). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayınevi.